

٣ التقارب المطلق وإعادة ترتيب المتسلسلات

في الفصل السابق درسنا إختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة، وعند دراسة متسلسلة $\sum a_k$ جميع حدودها سالبة يمكننا استخدام نفس الاختبارات على المتسلسلة $\sum (-a_k)$ ، وذلك لأن تقارب هذه المتسلسلة يكافئ تقارب المتسلسلة الأصلية، كما أن مجموع المتسلسلة الأصلية يساوي مجموع هذه المتسلسلة مضروباً في -1 .

لكن الأمر يختلف إذا كانت حدود المتسلسلة $\sum a_k$ متغيرة الإشارة، بالطبع لو كان هناك k_0 بحيث تكون جميع الحدود $a_k, k > k_0$ موجبة فإن الاختلاف بسيط: ندرس تقارب المتسلسلة بدءاً من الحد $k_0 + 1$ ثم نضيف المجموع المنتهي S_{k_0} . ما سوف يشغلنا في هذا الفصل هو دراسة المتسلسلات $\sum a_k$ التي لا تثبت إشارة حدودها أبداً، أي أن لكل k توجد حدود سالبة وحدود موجبة بعد الحد رقم k . من أمثلة تلك المتسلسلات المتسلسلة $\sum (-1)^k/k$ والمتسلسلة $\sum \sin(ka)/k^p$.

لدراسة تقارب مثل هذه المتسلسلات نبدأ بدراسة التقارب المطلق، أي تقارب المتسلسلة $\sum |a_k|$ ، والذي يمكن أن ندرسه باستخدام اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة، وفي حالة ثبوت تقارب المتسلسلة تقارباً مطلقاً تكون المسألة قد انتهت، لكن ماذا نفعّل لو لم تكن المتسلسلة مطلقة التقارب؟

سنرى في الفصل التالي كيف نتعرف على تقارب المتسلسلات متغيرة الإشارة وغير مطلقة التقارب، مثل تلك المتسلسلات تسمى متسلسلات مشروطة التقارب. يرتبط التقارب المطلق والمشروط بأسئلة أخرى تتعلق بقوانين الإبدال والإدماج في جمع حدود متسلسلة، نحن نعلم من قواعد الحساب المعتادة أن جمع الأعداد الحقيقية يخضع لقانوني الإبدال

$$a + b = b + a \quad \mathbb{R} \ni a, b \forall$$

والإدماج

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \mathbb{R} \ni a, b, c \forall$$

وهي القوانين التي يمكن تعميمها لأي عدد منتهى من الحدود باستخدام الاستنتاج الرياضي.

١-٣ - قوانين الإبدال والإدماج العامة للأعداد الحقيقية: لتكن $a_1, \dots, a_N$ أعداداً حقيقية، حيث $N \in \mathbb{N}^*$.

(١) لأي تبديلة σ للأعداد $\{1, \dots, N\}$ يكون

$$\sum_{k=1}^N a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^N a_k$$

(٢) لأي تقسيم $0 = \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_m = N$ يكون

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{k=\ell_j+1}^{\ell_{j+1}} a_k \right) = \sum_{k=1}^N a_k$$

من الطبيعي أن نتساءل: هل هذه القوانين صحيحة للمجاميع اللانهائية؟ أو لنطرح السؤال بشكل أكثر دقة: لو كانت لدينا متسلسلة $\sum a_k$ ، وغيرنا ترتيب حدودها، فهل يتغير مجموعها أم يبقى كما هو؟ وماذا لو قسمنا المجموع لأقواس بكل منها عدة حدود وقمنا بجمع ما بداخل كل قوس أولاً ثم درسنا مجموع المتسلسلة الناتجة هل يكون لها نفس المجموع كالمتسلسلة الأصلية؟

الإجابة على السؤال الثاني أسهل من الإجابة على السؤال الأول: فالمتسلسلة $\sum (-1)^k$ تباعدية لكننا لو أعدنا وضع الأقواس بالشكل

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k+1} + a_{2k+2}) = (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

سينتج لنا المتسلسلة الصفرية وهي تقاربية ومجموعها يساوي الصفر. السؤال الأول أجاب عنه برنارد ريمان (Bernhard Riemann) في نظرية شهيرة

٢-٣- نظرية ريمان للتقارب المشروط: لتكن $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية تقارباً مشروطاً أي أن $\sum a_k$ تقاربية لكن $\sum |a_k|$ تباعدية، وليكن $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث $x \leq y$. فإنه يوجد تناظر أحادي $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ بحيث

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = x, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = y$$

يمكن الرجوع لبرهان هذه النظرية في كتاب Tom Apostol, *Mathematical Analysis* (1974). توضح هذه النظرية أن التقارب المشروط يؤدي لعدم تحقق خاصية الإبدال في المجموع اللانهائي. لكن ماذا عن التقارب المطلق؟ النظرية التالية توضح أن التقارب المطلق يضمن تحقق خاصيتي الإبدال والإدماج.

٣-٣- نظرية:

(١) لتكن $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً ، فإنه لأي تناظر أحادي $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ يكون $\sum a_{\sigma(k)}$ تقاربية ومجموعها هو نفس مجموع المتسلسلة الأصلية.

(٢) إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية فإنه لأي تقسيم للأعداد الطبيعية $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ بحيث $1 = n_0, n_j < n_{j+1}$ يكون

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

برهان -

(١) لتكن $\sum a_k$ تقارباً مطلقاً ومجموعها يساوي A و لتكن $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تناظر أحادي، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى. نختار $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon/2$ لكل $n > n_0, p \in \mathbb{N}$

ونأخذ $m \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\{1, 2, \dots, n_0 + 1\} \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$$

نضع $p = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\} - n_0$ بالتالي يكون

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_0+1} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0+2}^{n_0+p} |a_k| < \varepsilon/2$$

فينتج أن

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_0+1} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0+1} a_k - A \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن $\sum a_{\sigma(k)}$ تقاربة ومجموعها يساوي A .

(٢) لنكن $b_j = \sum_{k=n_j-1}^{n_{j+1}} a_k$ من الواضح أن

$$\sum_{j=0}^m b_j = \sum_{k=0}^{n_{m+1}} a_k$$

أي أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum b_j$ هي متتابعة جزئية من متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum a_k$ ، وبالتالي فإن تقارب $\sum a_k$ يؤدي لتقارب $\sum b_j$ ويكون للمتسلسلتين نفس المجموع.

الفقرة الثانية من النظرية السابقة قد توحى لنا بنظرية أقوى، فلماذا لا نسمح بأن يحتوي كل قوس في التجميع الثاني على عدد لانتهائي من الحدود؟
كي نصل لصياغة معقولة لهذه الفكرة دعونا نفترض أن لدينا متتابعة من المتسلسلات التقاربية: $\sum a_{k,1}, \sum a_{k,2}, \dots, \sum a_{k,n}, \dots$ ، وليكن مجموع كل متسلسلة عدد $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$ ، ولنفرض أن المتسلسلة $\sum A_n$ تقاربية، يمكننا التعبير عن مجموع هذه المتسلسلة الأخيرة بالصورة:.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \right)$$

الآن: هل يمكن تغيير ترتيب علامتي الجمع في الصيغة السابقة؟ أي هل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \right)$$

الإجابة على هذا السؤال هي أيضاً بالسلب، ويمكننا ملاحظة ذلك من المثال التالي

٣-٤-: لتكن

$$a_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ -1, & k = n + 1 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

نجد أن $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} = 0$ بينما

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \right) \neq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \right)$$

في حالة التقارب المطلق يمكن تبديل عمليات الجمع، وذلك حسب النظرية التالية:

٣-٥- نظرية: لتكن $a_{n,k}$ أعداد حقيقية تحقق

(أ) لكل n المتسلسلة $\sum_k a_{k,n}$ تقاربية تقارب مطلق ومجموعها A_n ،

(ب) المتسلسلة $\sum_n A_n$ تقارب تقارب مطلق.

فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \right)$$

٤ اختبارات التقارب المشروط

كيف نتعرف على المتسلسلات مشروطة التقارب؟ هل هناك اختبارات للتقارب المشروط مثلما وجدنا اختبارات للتقارب المطلق؟ سنقدم فيما يلي اختباراً للتقارب المشروط (أو لتقارب المتسلسلات ذات الحدود متغيرة الإشارة) وهو اختبار آبل - ديريكليه (Abel-Dirichlet)، لكننا سنحتاج لإثباته لصيغة للجمع تسمى صيغة آبل:

٤-١- نظرية (صيغة آبل للجمع): لتكن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متابعتان من الأعداد ولتكن $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ، فإن

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_{n+1} B_n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) B_k$$

برهان - بوضع $B_0 = 0$ نلاحظ أن $b_k = B_k - B_{k-1}$ بالتالي

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k - a_{n+1} B_n + a_{n+1} B_n \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n \\
 &= a_{n+1} B_n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) B_k
 \end{aligned}$$

٢-٤ - نظرية (اختبار آبل - ديريكليه لتقارب المتسلسلات): لتكن $c_k = a_k b_k$ حيث $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متابعتان من الأعداد. إذا كان

(أ) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية وتؤول للصفر.

(ب) المتابعتة $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ محدودة.

فإن المتسلسلة $\sum c_k$ تقاربية.

برهان - نضع

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k, M = \sup_n |B_n|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، حيث أن $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ فإنه يوجد n_0 بحيث

$$k > n_0 \implies a_k < \varepsilon / M$$

ليكن $n > n_0$ و $p \in \mathbb{N}$ نجد أن

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| a_{n+p+1} B_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \\
 &\leq a_{n+p+1} |B_{n+p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \\
 &\leq M a_{n+p+1} + M \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) \\
 &= M a_{n+1} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum c_k$ تحقق شرط كوشي، فهي إذن تقاربة.

٣-٤- نتيجة: اختبار ليبنتز: لتكن $c_k = (-1)^k a_k$ حيث $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد. إذا كانت $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية وتؤول للصفر. فإن المتسلسلة $\sum c_k$ تقاربة.

برهان - نضع $b_k = (-1)^k$ فنجد أن

$$\sum_{k=1}^n b_k = \begin{cases} -1 & \text{عدد فردي } n \\ 0 & \text{عدد زوجي } n \end{cases}$$

أي أن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تحقق شروط اختبار آبل ديريكليه، وبالتالي ينتج المطلوب.

٤-٤- أمثلة:

(١) لندرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. نأخذ $a_k = 1/\sqrt{k}$ ، من الواضح أنها تناقصية وتؤول للصفر، وبالتالي فإن شروط اختبار ليبنتز متحققة، أي أن المتسلسلة تقاربة. لكن $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ تباعدية

(من اختبار التكامل) فتكون $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ تقاربة تقارباً مشروطاً.

(٢) لندرس المتسلسلة $\sum \frac{\sin ka}{k}$ حيث $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

بأخذ $a_k = 1/\sqrt{k}$ و $b_k = \sin ka$ نلاحظ أن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية وتؤول للصفر، يتبقى إذن دراسة محدودية المجاميع: $\sum_{k=1}^n \sin ka$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin ka &= \frac{1}{\sin(a/2)} \sum_{k=1}^n \sin(ka) \sin(a/2) \\ &= \frac{1}{\sin(a/2)} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{2k-1}{2}a\right) - \cos\left(\frac{2k+1}{2}a\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin(a/2)} \left(\cos(a/2) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}a\right) \right) \end{aligned}$$

ينتج من ذلك أن

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin ka \right| \leq \frac{2}{\sin(a/2)}$$

وهو ما يثبت تحقق شروط اختبار آبل - ديريكليه وهو ما يؤدي لأن المتسلسلة تقاربة. يمكن للقارئ باستخدام الحساب المباشر أو اختبار التكامل التأكد من أن التقارب مشروط.

٥.٤ أسئلة. إدرس صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

(١) إذا كانت $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ وكانت $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة محدودة فإن المتسلسلة $\sum a_k b_k$ تقاربة.

- (٢) إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية فإن المتسلسلة $\sum (-1)^k a_k$ تقاربية.
- (٣) إذا كانت $\sum |a_k|$ متسلسلة تقاربية فإن المتسلسلة $\sum (-1)^k a_k$ تقاربية أيضاً.
- (٤) إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية وكانت $\sum b_k$ متسلسلة مجاميعها الجزئية تُكوّن متتابعة محدودة فإن المتسلسلة $\sum a_k b_k$ تقاربية.
- (٥) إذا كانت $\sum a_k$ متسلسلة تقاربية فإن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^k}{k} a_k$ تقاربية أيضاً.

٦.٤ تمارين

(١) استخدم اختبار آبل-ديريكلييه لدراسة تقارب كل من المتسلسلات $\sum a_k$ الآتية:

$$a_k = \frac{(-1)^k \sqrt{k+3}}{k^2} \quad (أ) \quad a_k = \frac{\sin k \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(k)}{\ln k} \quad (د)$$

$$a_k = \frac{\cos k}{k} \quad (ب) \quad a_k = \frac{\sin(\frac{(k-1)^2}{2(k^2+1)}\pi)}{k} \quad (هـ)$$

$$a_k = \frac{k^3 \cos k}{k^4 + 2} \quad (ج) \quad a_k = \frac{\sin k \ln k}{k} \quad (و)$$

(٢) إدرس التقارب المطلق والمضروب لكل من المتسلسلات $\sum a_k$ الآتية:

$$a_k = \frac{(-1)^k k^k}{(2k)!} \quad (أ) \quad a_k = (-1)^k \sin(\pi/k) \quad (د)$$

$$a_k = \frac{\sin(2k)}{k} \quad (ب) \quad a_k = \left(\frac{ak}{k+1}\right)^k \quad (هـ)$$

$$a_k = \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2} \quad (ج) \quad a_k = \frac{\cos(k\pi/2)}{k \sin(3k)} \quad (ز)$$

(٣) لتكن $\sum (-1)^k a_k$ متسلسلة تحقق شروط اختبار ليبنتز (أي أن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية وتؤول للصفر)، وليكن

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

برهن لأن r_n له نفس إشارة الحد $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ وأن $|r_n| \leq a_{n+1}$

(٤) لتكن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الموجبة، برهن أن:

$$(أ) \text{ إذا كانت } \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > 0 \text{ فإن المتسلسلة } \sum (-1)^k a_k \text{ تقاربية}$$

$$(ب) \text{ إذا كانت } \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 0 \text{ فإن المتسلسلة } \sum (-1)^k a_k \text{ تباعدية.}$$

(٥) لتكن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة تناقصية وتؤول للصفر، ولتكن $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية. برهن أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum a_k b_k$ تقاربية فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = 0$$

(٦) أعط مثلاً لمتابعتين من الأعداد $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ و $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ بحيث تكون $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \searrow 0$ وتكون المتسلسلة $\sum a_k b_k$ تقاربية، بينما المجاميع الجزئية $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ غير محدودة.